

多項式的乘除法

(1) 單項 \times 單項： $(ax^n) \times (bx^m) = (a \times b) \times x^{n+m}$

例 $3x^4 \times 2x = (3 \times 2)x^{4+1} = 6x^5$

(2) 單項 \times 多項： $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

例 $2x \times (3x^2 - 1) = (2 \times 3)x^{1+2} - 2x \times 1 = 6x^3 - 2x$

$2x \times (3x^2 - 4x - 1) = (2 \times 3)x^{1+2} - (2 \times 4)x^{1+1} - 2x \times 1 = 6x^3 - 8x^2 - 2x$

(3) 多項 \times 多項： $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

例 $(2x^2 - 1)(3x + 4) = (2 \times 3)x^{2+1} + 2x \times 4 - 1 \times 3x - 1 \times 4$

(4) 直式運算及分離係數法

⊕ 降冪排列

⊙ 缺項補 0

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 0x - 1 \\ \times) \quad 3x + 4 \\ \hline 8x^2 + 0x - 4 \\ 6x^3 + 0x^2 - 3x \\ \hline 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4 \end{array}$$

單項乘以單項

計算 $(-3x^2) \times (2x^3)$

學生練習

計算 $(-3x^3) \times (\frac{2}{3}x)$

單項乘以多項

計算 $(-3x^2) \times (-5x + 8)$

學生練習

計算 $(1-x)(4x^2-3)$ (2) $(-2x^2)(3x^2-x+2)$

兩項乘以兩項

計算 $(3x^2 - 1) \times (-2x + 3)$

學生練習

計算 $(x-4) \times (-6x^2 + x)$

先乘再加減

計算 $(5x-1)(3x+2)-(3x-4)(-2x-6)$

學生練習

計算 $(-2-4x)(3+5x)-(-2x+4)(-8+3x)$

多項乘以多項(直式)

計算 $(2-3x+5x^2)\times(4x^2+7)$

學生練習

計算 $(-7x-4)\times(x-6x^2-3)$

分離係數法(有缺項)

計算 $(6x^3-2x+1)\times(2x^2+x+6)$

學生練習

利用分離係數法計算
 $(2x^2-13)\times(-x^3-x+1)$

相乘後相等

若 $2x^3+3x^2+kx-3$ 與 $(ax^2+b)(2x+3)$ 相等，求 $k=?$

學生練習

若將 $(2x+b)(ax-5)$ 展開得到 $6x^2+2x+c$ ，則 $c=?$

完全平方公式展開

展開化簡 $(-3x-5)^2$

學生練習

展開化簡 $(-2x+6)^2$

平方差公式展開

展開化簡 $(3-5x+2x^2)(3+5x-2x^2)$

學生練習

展開化簡 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

變數變換法

化簡 $(2x^2-3x)(2x^2-3x-6)-(2x^2-3x+4)^2$

學生練習

化簡
 $(x^2+25x-23)(3x^2-25x+23)+(-25x+23)^2$

乘積的係數

$(3x^2-2x+7)(2x^2+x-6)$ 展開後， x^3 項的係數為何？

學生練習

在 $(4x^2+7x-7)(2x^2-8x-5)$ 的展開式中， x^2 項的係數為何？

係數總和

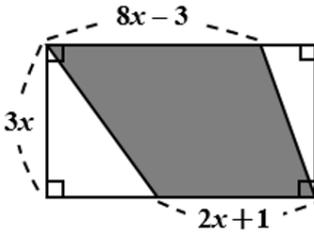
$(3x^2-2x+7)(2x^2+x-6)$ 展開後，各項係數總和為何？

學生練習

在 $(4x^2+7x-7)(2x^2-8x-5)$ 的展開式中，各項係數總和為何？

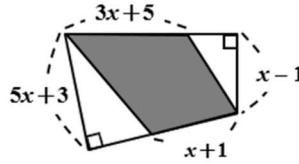
面積

利用多項式表示灰色部分面積



學生練習

利用多項式表示灰色部分面積。



多項式的除法

(1) 單項 ÷ 單項： $(ax^n) \div (bx^m) = (a \div b)x^{n-m}$

例 $(-5x^4) \div (3x^2) = (-5 \div 3)x^{4-2} = -\frac{5}{3}x^2$

(2) 多項 ÷ 單項 或 多項 ÷ 多項：使用直式運算或分離係數法

例 $(4x^2 + 1) \div (-2x + 1) = (-2x - 1) \cdots 2$

(3) 直式運算及分離係數法

⊕ 降冪排列

⊙ 缺項補 0

$$\begin{array}{r} -2x \quad -1 \\ -2x + 1 \overline{) 4x^2 + 0x + 1} \\ \underline{4x^2 - 2x} \\ 2x + 1 \\ \underline{2x - 1} \\ 2 \end{array}$$

(4) 除法原理：被除式 = 除式 × 商式 + 餘式，餘式的次數 < 除式的次數。

例 $(4x^2 + 1) \div (-2x + 1) = (-2x - 1) \cdots 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 1 = (-2x + 1)(-2x - 1) + 2$

單項除以單項

計算 $(-3x^2) \div (2x)$

學生練習

(1) 計算 $(2x^3) \div (-\frac{2}{3}x)$

(2) $3x^2$ 乘以什麼式子可以得到 $-12x^5$?

多項除以單項

計算 $(-5x^2 + 8x) \div (-2x)$

學生練習

計算 $(4x^2 - 3x) \div (-x)$

多項除以單項(有餘數)

計算 $(3x^2 + 4x - 1) \div (2x)$ 的商式及餘式

學生練習

計算 $(-6x^2 + 3x - 2) \div (-3x)$ 的商式及餘式

多項除以多項(無缺項)

計算 $(7x + 15x^2 - 2) \div (3x - 1)$ 的商式及餘式

學生練習

計算 $(3x^2 + 5x - 2) \div (x + 5)$ 的商式及餘式

多項除以多項(有缺項)

計算 $(-2x^3 + 4x^2 + 5) \div (2x - 1)$ 的商式及餘式

學生練習

計算 $(2x^3 + x) \div (x - 1)$ 的商式及餘式

先整理再除

計算 $[(2x^2 + x - 3) - (-x^2 - 3x + 4)] \div (x - 1)$ 的商式及餘式

學生練習

計算 $(2x - 5)^2 \div (2x + 5)$ 的商式及餘式

除法原理

若多項式 A 被 $2x - 1$ 除得商式為 $3x + 4$ ，餘式為 -5 ，求 $A = ?$

學生練習

若多項式 A 除以 $2x + 1$ 得商式為 $3x^2 + 2x - 1$ ，餘式為 5 ，則 $A = ?$

餘式定理

求 $x^{15} - 2x^{10} + 3x^5 - 4$ 除以 $x - 1$ 的餘式為何？

學生練習

已知有一多項式除以 $x - 2$ 得商式為 $2x + 5$ ，餘式為 5 ，若此多項式除以 $x - 3$ ，可得餘式為何？

餘式定理

若 $3x^2 + ax - 4$ 除以 $x + 2$ 得到餘式為 -5 ，求 $a = ?$

學生練習

若 $3x^2 + ax - b$ 被 $x - 1$ 除，得餘式為 2 ；被 $x + 1$ 除，得餘式為 -2 ，則 $3x^2 + ax - b$ 除以 $x - 3$ ，得餘式為何？

已知餘式求係數

若 $x^3 + 3x^2 + ax - b$ 除以 $x^2 - x + 1$ 得到餘式為 $2x - 5$ ，求 a, b 各為多少？

學生練習

若 $3x^3 - 2x^2 + ax + 16$ 能被 $x^2 - 2x + b$ 整除，求 a, b 各為多少？

看錯題目問題

兩個多項式 A, B ，已知 A 為 $27x^3 - 8$ ，欲求 $A + B$ 。阿宇不小心看成要求 $A \div B$ ，結果算出商式為 $9x^2 + 6x + 4$ ，餘式為 0 ，求 $A + B$ 的正確答案為何？

學生練習

已知兩個多項式 A, B ，甲誤將 B 看成 $3x + 2$ ，求得 $A \times B = 6x^2 + 7x + 2$ ；乙誤將 $A \times B$ 看成 $A + B$ ，求得 $5x - 1$ ，求 $A \times B$ 的正確答案。

實力練功坊

基礎(乘法)

- 下列多項式乘法的運算，哪一個選項是正確的？
(A) $(3x - 5)(2x + 4) = 6x^2 - 20$ (B) $(7x - 1)^2 = 49x^2 - 1$
(C) $(12x + 3)^2 = 144x^2 - 36x + 9$ (D) $(5x - 1)(-5x - 2) = 4 - 25x^2$
- 下列多項式乘法的運算，哪一個選項是正確的？
(A) $(3x - 1)(x + 7) = 3x^2 + 21x - x + 7$ (B) $(x + 2)^2 = x^2 - 2^2$
(C) $(4x - 3)(4x + 3) = 4x^2 - 3^2$ (D) $(2x - 3)^2 = 2x \times 2x - 2 \times 2x \times 3 + 3 \times 3$
- 小花以直式計算 $(2x + a)(bx - 3)$ 的過程如右，且計算過程與答案均正確，則 $a + b + c + d =$ _____

$$\begin{array}{r} 2x + a \\ \times) \quad bx - 3 \\ \hline -6x - 15 \\ cx^2 + dx \\ \hline cx^2 + 14x - 15 \end{array}$$

4. $(2x^2 - x + 3)(ax + b) + 6$ 化簡後為 $2x^3 + x^2 + 2x + 9$ ，求 $a + b =$ _____
5. 化簡 $(2x - 1)^2 - (x - 2)(x + 4) =$ _____ (以降冪排列表示)
6. 化簡 $(2x + a)^2 - 2(2x + a)(2x - a) + (2x - a)^2 = ?$
(A) 0 (B) $4a^2$ (C) $-4x^2$ (D) $-4ax$
7. 化簡 $(3x + 4)(4 - 3x) =$ _____ (以降冪排列表示)
8. 計算 $(3x + 2)(-x + 2) =$ _____ (以降冪排列表示)
9. 計算 $4(2x - 1)^2 - 3(x - 2)(-x) =$ _____ (以降冪排列表示)
10. 計算 $(-x + 2)(6x^2 - 4x + 3) =$ _____ (以降冪排列表示)
11. 若 $(4x^a - 6x + 1)(bx - 2) = 12x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 15x - 2$ ，則 $a + b =$ _____
12. 若兩多項式 $3x + 2$ 、 $ax^2 + bx + c$ 的乘積為 $9x^3 + 3x^2 + kx - 4$ ，其中 a 、 b 、 c 、 k 均是常數，則 $k = ?$ (A) -8 (B) -4 (C) 4 (D) 8
13. 展開 $(x - y + 1)(x + y + 1) + (y + 1)(y - 1) =$ _____
14. 計算 $(-3x^2 + 5x - 2)(7x^3 + x^2 - 5)$ 的結果中， x^4 項的係數為 _____
15. 展開 $(7 - 3x^2 + 2x^3)(6x + 4x^2 - 1)$ 後， x^4 項的係數為多少? (A) 12 (B) -12 (C) 8 (D) 0
16. $(299.5x^3 + 199.5x^2 - 100.5x - 200.5)(200.5x^3 + 100.5x^2 + 199.5x + 299.5)$ 展開合併後 x^3 項的係數為 _____
17. 已知 $(x^2 + mx + n)(x^2 - 3x + 5)$ 中不含 x^3 項和常數項，則 $m - n =$ _____
18. 已知 $(3x^2 + mx + n)(4x^2 - 3x - 2)$ 展開後， x^2 項係數和常數項都是 -6 ，則 m 、 n 的值各是多少? (A) $m = 4$ 、 $n = 3$ (B) $m = -4$ 、 $n = 3$ (C) $m = 4$ 、 $n = -3$ (D) $m = -4$ 、 $n = -3$
19. 求 $(1 - 2x + x^2 - x^3 + x^4)^2$ 的展開式中 x^2 項的係數為 _____
20. 求多項式 $(3x^2 + 9 - 5x)(4x^2 - 6x + 7) - (-x + 9x^2 - 4)$ 之係數總和 = _____
21. 已知多項式 $A = (ax - 3)(5x + 1)$ ， A 的各項係數(包括常數項)總和為 12 ，則 $A =$ _____ (須展開化簡且以降冪排列)

基礎(除法)

1. 已知一矩形的面積為 $x^3 - 3x + 2$ ，其中一邊長為 $x - 1$ ，則此矩形的另一邊長為何?
(A) $x - 2$ (B) $x^2 + x - 2$ (C) $x^2 - 2$ (D) $x^2 - x - 2$
2. 一矩形面積為 $28x^2 + 13x - 6$ 平方單位，若長為 $4x + 3$ ，則此矩形的周長為 _____ (以降冪排列表示)
3. 有一梯形的上底為 $2x + 3$ ，高為 $x + 2$ ，面積為 $3x^2 + 10x + 8$ ，請以 x 的多項式表示此梯形的下底為 _____ (以降冪排列表示)
4. 有一梯形的上底為 $2x - 3$ ，下底為 $4x + 5$ ，面積為 $6x^3 - x^2 - x$ ，請以 x 的多項式表示此梯形的高為下列何者? (A) $2x - 1$ (B) $2x + 1$ (C) $2x^2 - x$ (D) $2x^2 + x$
5. 若長方體的寬為 $2x - 1$ 、高為 $x + 2$ ，其中 $x > 0.5$ 。已知其體積為 $2x^3 + 5x^2 + x - 2$ ，則此長方體的長 = _____ (以降冪排列表示)

6. 若多項式 A 除以多項式 B 得商式 C ，餘式 D ，則下列何者不成立？
 (A) $A = B \times C + D$ (B) $\frac{A}{B} = C + \frac{D}{B}$ (C) $A - D = B \times C$ (D) $\frac{A}{B} = C + D$
7. 計算 $(-15x^2) \div 3x = ?$ (A) $5x$ (B) $-5x$ (C) $5x^2$ (D) $-5x^2$
8. 求 $-y^2 \div (2y+4)$ 的餘式為下列何者？(A) 5 (B) 0 (C) -4 (D) -6
9. 求 $(x-1)^2 \div (2x+1)$ 的商式與餘式之和？(A) $2x+1$ (B) $\frac{x}{2}+1$ (C) $x+1$ (D) $\frac{x}{2}-1$
10. $(8x^2 - 21x + 30) \div (4x - 7)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
11. $(6x^3 + 5x - 9) \div (-x + 3x^2)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
12. $(4x^3 - 1) \div (2x - 1)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
13. 計算 $(4x^2 - x^3 - 5) \div (x^2 - 3)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
14. 計算 $(y - 2y^2 + 18) \div (2y + 5)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
15. 計算 $(2x^3 - 3x^2 - 1) \div (2x - 1)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
16. 計算 $(3x^2 + 5x) \div (x - 5)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
17. 計算 $(-2x^2 + x^3 - 1) \div (x + 1)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
18. 計算 $(12x^3 - 9x^2 - 6x) \div (3x)$ 的商式為 _____，餘式為 _____
19. B 為多項式，且 $\frac{4x^2 + 4x - 8}{B} = 2x + 3 - \frac{5}{B}$ ，則 $B =$ _____
20. A 為多項式，且 $\frac{x^2 + 4x - 17}{A} = x - 3 + \frac{4}{A}$ ，則 $A =$ _____
21. 已知兩多項式 A 、 B 滿足 $\frac{A}{x+5} = (x-3) + \frac{18}{x+5}$ 及 $\frac{A}{x-3} = (x+5) + \frac{B}{x-3}$ ，則 $A+B =$ _____ (以降冪排列表示)

考題

1. 若多項式 A 除以 $x+2$ 的商式是 $3x+1$ ，餘式是 -4 ，求多項式 $A =$ _____ (以降冪排列表示)
2. 若多項式 A 除以 $2x-3$ 的商式是 $4x+5$ ，餘式是 6 ，求多項式 $A =$ _____ (以降冪排列表示)
3. 若有一多項式 A 除以 $(-3x^2+1)$ 得商式為 $(-x+2)$ ，餘式為 $(x+3)$ ，則此多項式 $A = ?$
 (A) $3x^3 - 6x^2 + 4x + 5$ (B) $3x^3 - 6x^2 + 5$ (C) $-3x^3 - 6x^2 + 5$ (D) $3x^3 + 6x^2 + 5$
4. 若多項式 A 除以 $(2x+1)$ 得商式為 $3x-4$ ，餘式為 5 ，則 $A = ?$
 (A) $6x^2 - 5x - 4$ (B) $6x^2 - 5x - 9$ (C) $6x^2 + 5x + 1$ (D) $6x^2 - 5x + 1$
5. 若有一多項式 A 除以 $(4x^2 - 3x + 4)$ 得商式為 $(x-2)$ ，餘式為 $(5x+4)$ ，則此多項式 $A = ?$
 (A) $4x^3 + 5x^2 + 3x + 12$ (B) $4x^3 - 11x^2 + 5x - 12$
 (C) $4x^3 - 11x^2 + 15x - 4$ (D) $4x^3 + 5x^2 + 15x - 4$
6. 已知多項式 $2x^2 + 6x + 1$ 除以 $ax + b$ 後，得到商式為 $2x + 1$ ，餘式為 $-\frac{3}{2}$ ，求 $a + b =$ _____

7. 已知 $6x^2 + 13x - 11$ 除以多項式 A 後，得到商式為 $3x - 1$ ，餘式為 -6 ，則多項式 $A =$ _____

8. 右圖是多項式的除法運算，試求 $a + h =$ _____

$$\begin{array}{r} -5x+h \\ bx+1 \overline{) -15x^2+ax-7} \\ \underline{cx^2+dx} \\ ex-7 \\ \underline{fx+g} \\ 0 \end{array}$$

9. 下圖是多項式的除法直式運算，則 a 、 b 應各填入什麼？

(A) $a = x$ 、 $b = 13$ (B) $a = 9x$ 、 $b = 13$

(C) $a = 9x$ 、 $b = -7$ (D) $a = x$ 、 $b = -7$

$$\begin{array}{r} f+5 \\ x+g \overline{) 2x^2+a+b} \\ \underline{c-4x} \\ d+b \\ \underline{d+e} \\ 3 \end{array}$$

10. 若一多項式 $A = x^2 + 6x - 9$ 加上一常數 a 後，可被 $2x + 4$ 整除，則 $a =$ _____

11. 已知 $2x^2 + 7x + a$ 可被 $2x + 1$ 整除，求 $a = ?$ (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

12. 若 $6x^3 - x^2 + mx - 1$ 可被 $2x - 1$ 整除，則 $m = ?$ (A) 1 (B) -1 (C) 4 (D) -4

13. $x^3 + ax^2 + 3x + b$ 除以 $x^2 + 2x + 1$ 餘式為 0，則 $a + b =$ _____

14. 若 $(x - 2)^2$ 能整除 $4x^3 - 7x^2 + mx + n$ ，則：

(1) $m =$ _____ (2) $n =$ _____ (3) 商式 = _____ (以降冪排列表示)

15. 以 $x^2 + x + 1$ 除 $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ 的餘式為 x ，則 $a =$ _____ ; $b =$ _____

16. 若 A 是一個多項式，且 $(3x^2 - 2 + x) - 2A = 5x^2 - 3x + 10$ ，求多項式

$A =$ _____ (以降冪排列表示)

17. 若 $[(ax^2 - bx + c) - (x^2 + 3x - 2)] \div (3x - 2)$ 的商式為 $(x - 4)$ 且餘式為 2，則下列何者正確？

(A) $a = 3$ (B) $b = 11$ (C) $c = 6$ (D) $a + b + c = 20$